CARBAC	*Fonctions*	BAC 2018

- **F1** : Si $g(x) = (\ln(x))^2$ alors $g'(x) =$ ....
- **F2** : Soit la fonction f définie sur $]-\frac{1}{2};+\infty[$ par $f(x) = 2xln(2x+1)$.
  Vrai ou faux ? :
  « Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ est $1+\ln(4)$. »
- **F3** : Rappeler les limites par croissances comparées.
- **F4** : Si $f(x) = 3 - \frac{3}{1+e^{-2x}}$ alors $f'(x) =$ ....
- **F5** : Soit la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = 5e^{-x} - 3e^{-2x}$. Montrer que f est positive.

Bien connaître les propriétés de la fonction ln

- **F6** : Soit la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $(x) = 100 - 75e^{-\ln(0,5)\times x}$. Déterminer les variations de f.
- **F7** : Vrai ou faux : $\ln(\sqrt{e^7}) + \frac{\ln(e^5)}{\ln(e^2)} = \frac{e^{ln3+ln4}}{e^{ln4-ln2}}$?
- **F8** : L'équation (E) : $\ln(x-1) - \ln(x+2) = \ln(4)$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.
- **F9** : Déterminer le tableau de signes de $1 - 2\ln(x)$.

Bien connaître les propriétés de la fonction exponentielle

- **F10** : Prouver que pour tout réel x, $\frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{e^x}{1+e^{1-x}}$.
- **F11** : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $1 - 3e^{2x} = -7$.
- **F12** : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $e^{2x} - e^x - x = 0$

Connaître les fonctions affines

- **F13** : Déterminer une équation cartésienne de la représentation graphique de la fonction affine f telle que :
  $f(1) = 0$ et $f(2) = 4$.

Vérifier qu'une fonction vérifie des contraintes, fonction de densité

- **F14** : f est une fonction de retouche si est définie sur [0 ;1], si f(0)=0 et f(1) =1 ; si elle est croissante sur [0 ;1].
  La fonction $x \longmapsto 4x^3 - 6x^2 + 3x$ est–elle une fonction de retouche ?
- **F15** : La fonction inverse est–elle une densité de probabilité sur [1 ;2] ?

Montrer qu'une fonction n'est pas constante

- **F16** : La fonction $f : x \longmapsto x\left(2 - \ln\left(\frac{x}{2}\right)\right)$ est–elle constante sur $]0;+\infty[$?

Savoir dériver et savoir déterminer les variations d'une fonction

F17 : Etudier les fonctions suivantes sur leur ensemble de définition (dérivée et variations, limites non demandées)

	$f_1(x) = 10(-x-1)e^{-x}$	$f_2(x) = 2x - e^x$	$f_3(x) = \frac{5(e^{0.3t}-1)}{e^{0,3t}+1}$	$f_4(x) = e^{2x} - e^x - x$
$f_5(x) = xe^{1-x^2}$	$f_6(x) = \ln\left(\frac{x}{2}\right)$	$f_7(x) = \ln(200 - 2x^2)$	$f_8(x) = x - \ln(x^2+1)$	$f_9(x) = \ln(x) + x^2$

Savoir déterminer les variations d'une fonction trigonométrique

- **F18** : Déterminer les variations de la fonction tangente définie sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ par $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Savoir déterminer les variations d'une fonction définie avec paramètres

- **F19** : Déterminer les variations de la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x) = ln(x) - ax$ où a est un réel.

Déterminer les variations à l'aide d'une fonction auxiliaire

- **F20** : Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 2) + 2$.
  Montrer que $f'(x) = \frac{u(x)}{x^2}$ où $u(x) = \ln(x) + x - 3$.
  Sachant que u est négative puis positive sur $]0;+\infty[$, que peut–on en déduire ?

- **F21** : Soit la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = (x-1)e^{2x} - 1 - x$.
  Déterminer les variations de f.

Déterminer les coordonnées des points d'intersection de deux courbes.

- **F22** : Soit les fonctions f et g définies sur [0 ;16] par $f(x) = \ln(x+1)$ et $g(x) = \ln(x+1) + 1 - \cos(x)$.
  Déterminer les coordonnées de deux points d'intersection de leurs représentations graphiques.

Déterminer le nombre de points d'intersection de deux courbes

- **F23** : Soit la $\mathscr{C}$ courbe d'équation $y = e^x$. Soit m un réel strictement positif.
  Déterminer le nombre de points d'intersection de la droite d'équation $y = mx$ avec la courbe $\mathscr{C}$.

Comparer la position relative de deux courbes

- **F24** : Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{1-x^2}$ et $g(x) = e^{1-x^2}$.
  Montrer que pour tout réel négatif, on a $f(x) < g(x)$. Que peut–on en déduire ?
- **F25** : Soit les fonctions f et g définies sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = e^{-x}\cos(x)$ et $g(x) = e^{-x}$.
  Déterminer les positions relatives des courbes représentant f et g .
- **F26** : Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$ et $g(x) = 2e^{\frac{x}{2}} - 1$.
  Déterminer les positions relatives des courbes représentant f et g .
- **F27** : Soit f et g les fonctions définies sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = (lnx)^2$.
  Déterminer les positions relatives des courbes représentant f et .

Déterminer l'écart maximal entre deux courbes

- **F28** : Soit les fonctions f et g définies sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = e^{-x}\cos(x)$ et $g(x) = e^{-x}$.
  Déterminer la valeur de x pour laquelle l'écart entre les deux courbes est le plus grand.
- **F29** : Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = 5e^{-x} - 3e^{-2x}$ et $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = x - 3$.
  Soit x un réel positif, M un point d'abscisse x de c_f et N un point d'abscisse x de $\mathscr{D}$.
  Exprimer MN en fonction de x.
- **F30** : Soit f et g les fonctions définies sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = (lnx)^2$.
  Montrer que sur l'intervalle [1 ;e], l'écart maximal entre les deux courbes est obtenu pour $x = \sqrt{e}$.

Déterminer la position relative d'une courbe avec une de ses tangentes

- **F31** : Montrer que la courbe de la fonction exponentielle est toujours au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 0.

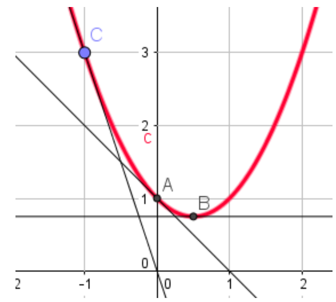
Déterminer des limites (x est la variable)

F32 :	11	12	13	14	15	16	17
En	$+\infty$	$+\infty$	0	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
pour	$2xe^{-x}$	$e^x - 3x$	$\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln(x)-2)$	$x - 15\ln(x) - \frac{4}{x}$	$2xe^{-x^2}$	$\ln(x) - 3x^2$	x^2e^{-2x}

Montrer qu'une droite est une asymptote horizontale

- **F33** : Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3}{1+e^{-2x}}$.
  Montrer que la droite d'équation $y = 3$ est une asymptote à $\mathscr{C}$.
  Déterminer une autre asymptote à $\mathscr{C}$.

Lire un nombre dérivé



- **F34** : A partir du graphique ci–dessous d'une fonction f (en rouge), lire trois nombres dérivés.

Calculer un coefficient directeur

- **F35** : Soit la fonction f définie sur [0 ;20] par $f(x) = (x+1)\ln(x+1) - 3x + 7$.
  Soit $\mathscr{C}$ sa représentation graphique.
  Déterminer le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

Déterminer l'équation d'une tangente à une courbe

- **F36** : Soit la fonction $f : x \mapsto x\ ln\left(\frac{x}{2}\right) - x + 2$ et $\mathscr{C}$ sa représentation graphique.
  Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $2e$.
  Déterminer les coordonnées du point d'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses.

Tangentes communes

- **F37** : Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par f(x)= e^x et $g(x) = 1 - e^{-x}$.
  On admet que les courbes représentant f et g ont une tangente commune, pour f, en un point A d'abscisse a , pour g, en un point B d'abscisse b.
  Montrer que $b = -a$. En déduire que le réel a est solution de l'équation : $2(x-1)e^x + 1 = 0$.

Démontrer qu'une droite est tangente à une courbe

- **F38** : Soit la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = e^x$.
  Démontrer que la droite d'équation $y = ex$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

Comparer des coefficients directeurs

- **F39** : Soit les fonctions $f :\ t \mapsto 2te^{-t}$ et $g: t \mapsto e^t$ représentées par des courbes Cf et Cg.
  A l'origine, quelle est la courbe qui est la plus proche de la verticale ?

Montrer que deux courbes admettent en un même point une même tangente.

- **F40** : Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$ et $g(x) = 2e^{\frac{x}{2}} - 1$.
  Démontrer que les représentations graphiques de f et g admettent ont une tangente commune en un unique point.

Ajuster une courbe

- **F41** : Le profil d'un toboggan est modélisé par une courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction f définie sur [1 ;8] par :
  $f(x) = (ax+b)e^{-x}$ où a et b sont des entiers.
  On souhaite que la tangente à $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 1 soit horizontale. En déduire b.
  On souhaite que le haut du toboggan soit situé entre 3,5 m et 4 m de haut. En déduire a.
- **F42** : Soit u une fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $u(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$ et $\mathscr{C}$ sa représentation graphique.
  La droite d'équation $y\ = 1$ est une asymptote. En déduire a.
  Sachant que $u(1)\ = 0 = u(4)$, en déduire b et c.

Résoudre équations et inéquations

- **F43** : Montrer que l'équation $f(x) = xe^{-x} - 0{,}1 = 0$ admet une unique solution dans [0 ;1] dont on donnera une valeur arrondie à 0,1 près et un encadrement d'amplitude 0,01.
- **F44** : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3}{4+6e^{-2x}}$.
  V/F : L'équation $f(x) = 0{,}5$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$?
- **F45** : Résoudre dans [0 ;1] l'équation $x - e^{-x} + 1 = 0$
- **F46** : La vitesse de descente en m/s d'un colis lancé d'un parachute est donnée par $f(t) = \frac{5(e^{0,3t}-1)}{e^{0,3t}+1}$.
  Le colis est en bon état si sa vitesse à l'arrivée n'excède pas 6 m/s. Est–ce le cas ?
- **F47** : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $30 = 32{,}7(1 - e^{-0,3t})$.
- **F48** : V/F : L'équation $\cos(x) = x$ admet une unique solution dans l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.
- **F49** : Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \geqslant 0{,}99$.
- **F50** : Montrer que sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \geqslant 0$.
- **F51** : Soit la fonction g définie sur $\left]-\frac{1}{2}\ ;+\infty\right[$ par $g(x) = 2xln(2x+1)$.
  V/F : l'équation $g(x) = 2x$ a deux solutions.
- **F52** : Montrer que pour tout réel x positif, $x \geqslant \sin(x)$.

- **F53** : Montrer que pour tout réel x, $2e^{\frac{x}{2}} - 1 \geqslant x + 1$.
- **F54** : Montrer que pour tout réel x positif, et tout entier naturel n, on a $\frac{1}{1+x^n} \leqslant 1$
- **F55** : Soit f une fonction croissante sur $[-2;1]$ admettant une unique racine c sur cet intervalle.
  Que suffit–il de vérifier pour prouver que $c < -0{,}5$?

Transformer une équation en une équation équivalente

- **F56** : Montrer que pour tout réel positif, résoudre l'inéquation $xe^{1-x^2} \leqslant$ est équivalent à résoudre l'inéquation :
  $$\ln(x) - x^2 + x \leqslant 0.$$
- **F57** : Soit l'équation $e^x - x^n = 0$ où x désigne un réel positif et n un entier naturel non nul.
  Montrer que l'équation est équivalente à $\ln(x) - \frac{x}{n} = 0$.
  En déduire les valeurs de n pour lesquelles l'équation initiale admet deux solutions ?

Montrer qu'une fonction est positive

- **F58** : Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $(x) = \ln(x) + x - 3$.
  Déterminer le signe de f.
- **F59** : Montrer que la fonction f définie par $f(x) = 3 - \frac{3}{1+e^{-2x}}$ est positive.
- **F60** : Montrer que pour tout réel x positif, $x - \sin(x) \geqslant 0$. Interpréter graphiquement.
- **F61** : Montrer que pour tout $\in]-1;0]$, on a $x + 1 - 3e^{-x^2} > 0$.
- **F62** : Montrer que pour tout $x \leqslant -1$, on a : $1 + 3(2x^2 - 1)e^{-x^2} > 0$.

Interpréter graphiquement les solutions d'une équation ou d'une inéquation

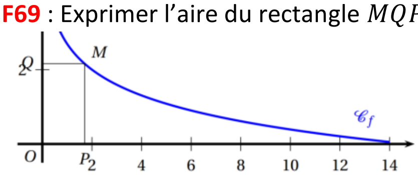
- **F63** : Pour tout réel x, on pose $f(x) = x - \ln(x^2 + 1)$.
  Déterminer la solution de l'équation $f(x) = x$ puis interpréter graphiquement le résultat.
- F64 : Pour tout réel x, on pose $f(x) = \frac{3}{1+e^{-2x}}$.
  Montrer que la fonction h définie par $h(x) = 3 - f(x)$ est positive. Interpréter graphiquement ce résultat.

Déterminer l'image d'un intervalle

- **F65** : On sait que la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = 100 - 75e^{-\frac{\ln(5)}{10}x}$ est croissante sur $[0;+\infty[$.
  Montrer que si $x \geqslant 10$ alors $f(x) \geqslant 85$.
- **F66** : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \ln(x^2 + 1)$.
  Montrer que si $x \in [0;1]$ alors $f(x) \in [0;1]$.
- **F67** : Soit la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(t) = \frac{50}{1+49e^{-0{,}2t}}$.
  Démontrer que pour tout réel $t \geqslant 0$, $f(t) < 50$.

Comprendre la notion d'appartenance d'un point à une courbe.

- **F68** : Le point $B(2e\,;2)$ appartient–il à la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto x\, ln\left(\frac{x}{2}\right) - x + 2$?
- **F69** : Exprimer l'aire du rectangle MQP_2O sachant que M est est le point d'abscisse 1,8 de $\mathscr{C}_f$?



Déterminer des extremums

- **F70** : Montrer que déterminer le maximum sur $]0;50]$ de $f : x \mapsto \frac{x}{x^2+765}$ c'est comme déterminer le minimum sur]0 ;50] de la fonction $g : x \mapsto x + \frac{765}{x}$.

Travailler avec des familles de fonctions

- **F71** : Pour chaque réel a, on pose $f_a(x) = e^{x-a} - 2x + e^a$.
  Montrer que pour tout réel a, la fonction f_a possède un minimum.
  Existe–t–il une valeur de a pour laquelle ce mimimum est le plus petit possible ?
- **F72** : Soit k un réel strictement positif et les fonctions f_k définies par $f_k(x) = x + ke^{-x}$ et représentées ci–contre.
  Montrer que tous les minimums de ces fonctions sont alignés.