CARBAC	**Primitives & Intégrales**	**BAC 2018**

- **I1** : Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$. Montrer que (u_n) est monotone.
- **I2** : Soit la fonction F définie sur ℝ par $F(x) = -\frac{3}{2}\ \ln(1+e^{-2x})$.
  Montrer que F est une primitive sur ℝ de la fonction f définie sur ℝ par $f(x) = \frac{3}{e^{2x}+1}$
- **I3** : Soit la fonction f définie sur ℝ par $f(x) = xe^x$.
  Exprimer $f'(x)$ en fonction de $f(x)$. En déduire une primitive F de f sur ℝ.

Calculer des intégrales et des primitives

- **I4** : Calculer A= $\int_{-1}^{0} 3e^{2x}dx$; $B = \int_1^e \frac{ln(x)}{x}dx$; $C = \int_0^1 xe^{1-x^2}dx$; D = $\int_0^1 \frac{-2x}{(x^2+1)^2}dx$
- **I5** : Montrer que pour tout réel x, $\frac{1}{1+e^{1-x}} = \frac{e^x}{e^x+e}$ et en déduire que $\int_0^1 \frac{1}{1+e^{1-x}}dx = 1 + ln\left(\frac{2}{1+e}\right)$.
- **I6** : Pour tout réel $x\ > 0$, on pose $H(x) = \frac{1}{2}[\ln(x)]^2$. Calculer $H'(x)$ et en déduire que $\int_1^{e^2} \frac{2-\ln(x)}{x}dx = 2$.
- **I7** : Soit la fonction f définie sur ℝ par $(x) = xe^{-x}$.
  1°) Déterminer une primitive F de f sur ℝ sous la forme $F(x) = (ax+b)e^{-x}$.
  2°) Autre méthode : Exprimer $f'(t)$ en fonction de $f(t)$ puis $f(t)$ en fonction de $f'(t)$.
  Que dire de $x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ et $\int_0^x f'(t)dt$? Déduire alors de 2°) une primitive F de f.

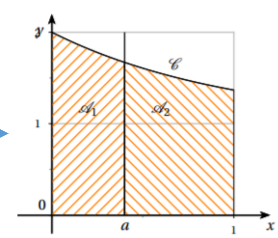
Montrer qu'une fonction est une primitive d'une autre fonction

- **I8** : Montrer que la fonction F définie sur $[2; 2e]$ par $F(x) = \frac{x^2}{2}ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{4}$ est une primitive sur $[2; 2e]$ de la fonction f définie par $f(x) = xln\left(\frac{x}{2}\right)$.

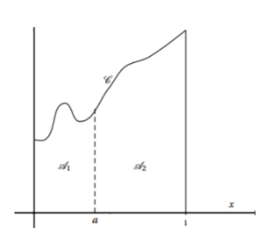
Relier aires et intégrales

- **I9** : Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x)\ = xe^{-x}$ représentée par $\mathscr{C}$ dans un repère orthogonal.
  Soit $\mathscr{A}$ la fonction définie sur $[0; +\infty[$ qui correspond à l'aire en unités d'aire du domaine limité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ représentant f et les droites d'équation $x = 0$ et $x\ =\ t$.
  1°) Etudier les variations de f et la limite de f en $+\infty$.
  2°) Compléter : pour tout réel t, $\mathscr{A}(t) = \cdots$.
  3°) Montrer que $\mathscr{A}$ est croissante sur $[0; +\infty[$.
  4°) On admet que l'aire du domaine limité par $\mathscr{C}$ et l'axe des abscisses est 1 u.a. Qu'en déduire pour $\mathscr{A}$?

- **I10** : Soit f la fonction définie sur $[0; 1]$ par $f(x)\ = 1 + e^{-x}$ et représentée ci–contre par $\mathscr{C}$.
  On cherche un réel a tel que $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ soient de même aire.
  Montrer que si a existe, il est solution de l' équation $2x - 2e^{-x} + \frac{1}{e}$=0.

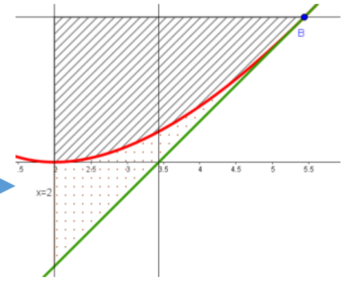


- **I11** : Soit une fonction f positive et continue sur [0 ;1] dont on connait une primitive F de f sur [0 ;1].
  Montrer que si a existe alors $F(a) = \frac{F(0)+F(1)}{2}$

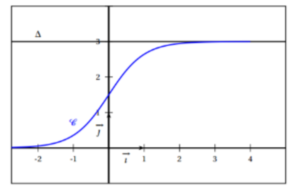


- **I12** : 1°) Calculer $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\,dx$ puis expliquer graphiquement le résultat.
  2°) V/F : Si $\int_0^1 f(t)dt \geqslant 0$ alors pour tout réel t de $[0\ ;1]$, $f(t) \geqslant 0$?

- I13 : Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = x\ln\left(\frac{x}{2}\right) - x + 2$ et représentée par la courbe $\mathscr{C}_f$ (en rouge) dans un repère orthogonal.
  Soit $B(2e;2)$ un point de la courbe $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{D}$ sa tangente à $\mathscr{C}_f$.
  Exprimer à l'aide d'intégrales l'aire du domaine rempli de points puis l'aire du domaine hachuré. Estimer ensuite cette aire.

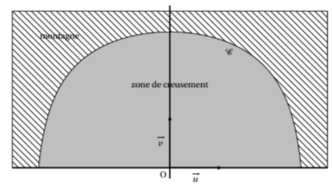


- I14 : Soit f une fonction continue représentée par la courbe $\mathscr{C}$ ci–contre.
  Exprimer à l'aide d'une intégrale, l'aire du domaine $\mathscr{D}$ correspondant à l'ensemble des points $M(x\,;y)$ du plan défini par $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ f(x) \leqslant y \leqslant 3 \end{cases}$



Comprendre les calculs en unité d'aires

- I15 : Pour le repère orthonormé ci–contre, 1 unité correspond à 2 m.
  Le profil de la zone de creusement est celui d'une fonction f définie sur $[-2{,}5;2{,}5]$ définie par $f(x) = \ln(-2x^2 + 13{,}5)$.
  Montrer que l'aire en m^2 de la zone de creusement est $8\int_0^{2,5} f(x)dx$.



Encadrer une intégrale

- I16 : Soit f une fonction continue dont on donne ci–contre le tableau de variations.
  Montrer que $1 \leqslant \int_2^5 f(x)dx \leqslant 6$.

x	2	3	4	5
Variations de f	3 ↘	0 ↗	1 ↗	2

- I17 : Soit n un entier naturel, on pose : $I_n = \int_0^n \frac{x}{e^x - x}dx$
  Montrer que pour tout réel x, on a $e^x - x \geqslant \frac{e^x}{2}$ et en déduire que $I_n \leqslant \int_0^n 2xe^{-x}dx$.
  Pour $x \geqslant 0$, on pose $H(x) = (-x-1)e^{-x}$. Calculer $H'(x)$ et en déduire que $I_n \leqslant 2$.
- I18 : Pour tout entier n non nul et tout réel x de $[0\,;1]$, on pose $f_n(x) = x^2e^{-2nx}$ et $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$.
  Montrer qu'on a toujours $f_n(x) \leqslant e^{-2nx}$ et en déduire que (I_n) converge vers 0.

Etudier les variations d'une suite d'intégrales

- I19 : Etudier les variations de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$.
  Avec votre calculatrice, conjecturer le sens de variation de cette suite puis démontrer cette conjecture.

- I20 : Soit n un entier naturel, on pose : $I_n = \int_0^n \frac{x}{e^x - x}dx$. Montrer que la suite (I_n) est croissante.

- I21 : Soit la suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = \int_0^1 \frac{e^{-(n-1)x}}{1+e^x}dx$. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

Exploiter quatre propriétés fondamentales des intégrales

- I22 : Citer quatre propriétés P_1 à P_4 des intégrales.
- I23 : On sait que la suite (u_n) pour tout entier n par $u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+ne^{1-x}}dx$ est décroissante. En déduire qu'elle converge.
- I24 : Soit n un entier naturel, on pose : $I_n = \int_0^n \frac{x}{e^x - x}dx$. Montrer que la suite (I_n) est croissante.
- I25 : Pour tout entier n non nul et tout réel x de $[0\,;1]$, on pose $f_n(x) = x^2e^{-2nx}$ et $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$.
  Montrer qu'on a toujours $f_{n+1}(x) = e^{-2x}f_n(x)$ puis que $f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$. En déduire que la suite (I_n) est décroissante.
- I26 : 1°) On pose $A = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx$ et $B = \int_0^1 \frac{1}{1+e^x}dx$. Montrer que $A + B = 1$. En déduire B.
  2°) On pose $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$. Montrer que $u_n + u_{n+1} = \frac{1}{n+1}$. En déduire u_1.
- I27: On rappelle que $E(T) = \lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x \lambda te^{-\lambda t}dt$ .Montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(t) = \left(-t - \frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda t}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : t \mapsto \lambda te^{-t}$. En déduire que $E(T) = \frac{1}{\lambda}$.

Calculer une valeur moyenne

- I28 : calculer la valeur moyenne de la fonction cosinus sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$. Interpréter graphiquement le résultat.

Théorème fondamental

- I29 : On pose $F(x) = \int_0^x e^{2t}dt$. Calculer $F'(x)$.