CARBAC	***Suites***	**BAC 2018**

- **S1** : Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 80$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 30$.

  a) Avec votre calculatrice, conjecturer la limite L de cette suite.

  b) Montrer que la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - L$ est géométrique et en déduire une expression de u_n en fonction de n.
- **S2** : Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n$.
  Soit aussi la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n + 2n^2 + 3n + 5$.
  Calculer quelques termes de la suite (v_n) et en déduire une expression de u_n en fonction de n.

Calculer avec un tableur

- **S3** : Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n par : $u_{n+1} = 2u_n - n + 3$.
  Soit la suite (v_n) définie pout tout entier naturel n par $v_n = 2^n$.
  Calculer avec un tableur les 3 premiers termes de chaque suite. Contrôler vos résultats.

Expression explicite d'une suite géométrique

- **S4** : Soit une suite (u_n) de premier terme $u_0 = -4 - 2i$ et telle que pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = \frac{1}{2} i\, u_n$. Exprimer $|u_n|$ en fonction de n et en déduire la convergence de la suite de terme général $|u_n|$.

Etudier une suite arithmético–géométrique

- **S5** : Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1000$ et pour tout entier n par : $u_{n+1} = 1{,}2\, u_n - 100$.
  Montrer que la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 500$ est géométrique.
  En déduire une expression de u_n en fonction de n.

Utiliser une suite auxiliaire

- **S6** : Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier n par : $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3 \times 0{,}5^n$.
  Montrer que la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 10 \times 0{,}5^n$ est géométrique.
  En déduire une expression de u_n en fonction de n.
- **S7** : Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n par : $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$.
  Démontrer que la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \ln(u_n) - \ln(2)$ est géométrique.
- **S8** : Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n par : $u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$.
  Démontrer que la suite (v_n) définie pour tout entier n par $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$ est géométrique.
  En déduire une expression de u_n en fonction de n.
- **S9** : Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \frac{9}{6-u_n}$.
  Démontrer que la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = \frac{1}{u_n-3}$ est arithmétique.
  En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Faire (ou non) un raisonnement par récurrence

- **S10** : Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n par : $u_{n+1} = 2u_n - n + 3$.
  Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n = 3 \times 2^n + n - 2$.
- Revoir S2
- **S11** : Montrer que pour tout entier naturel n $\geqslant$ 3, on a : $2n^2 \geqslant (n+1)^2$
  et pour tout entier naturel n $\geqslant$ 4 : $2^n \geqslant n^2$.
- **S12** : Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n par : $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.
  Montrer que pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant n^2$. Qu'en déduire ?
- **S13** : On considère la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par $t_0 = 0$ et $t_{n+1} = t_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.
  Déterminer une expression de t_n en fonction de n.

Calculer la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique

- **S14** : Soit une suite (u_n) de premier terme $u_0 = 0$ et telle que pour tout entier n, $u_n = n^2 + n$.
  Soit la suite (v_n) définie pour tout entier n par $v_n = u_{n+1} - u_n$. Quelle est la nature de la suite (v_n).
  Prouver que $v_0 + v_1 + \cdots + v_n = (n+1)(n+2)$ et $v_0 + v_1 + \cdots + v_n = u_{n+1} - u_0$.
- **S15** : Calculer rapidement $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{12}$.

Calculer une limite

- **S16** : Sachant que $0 < \frac{n}{2^n} \leqslant \frac{1}{n}$, calculer la limite de la suite de terme général $u_n = 3 + \frac{n-2}{2^n}$.
- **S17** : Calculer la limite L d'une suite (u_n) telle que pour tout entier n non nul, $u_{n+1} + u_n = \frac{1-e^{-n}}{n}$.
- **S18** : Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} 100 - 75 \times 0{,}85^n$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} n - 75 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$.
- **S19** : Soit (u_n) une suite croissante de premier terme $u_0 = 1$ et $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.
  Montrer que (S_n) diverge.

Prouver la convergence d'une suite sans calculer sa limite.

- **S20** : Soit une suite (u_n) de premier terme $u_0 = 1$ et telle que pour tout entier n, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 2$.
  Montrer que la suite (u_n) converge. Que peut –on dire de sa limite L ?
- **S21** : Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier n par : $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n^2 + 1)$.
  On admet que la fonction $f : x \mapsto x - \ln(x^2 + 1)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
  Montrer que la suite est bornée entre 0 et 1 puis qu'elle est décroissante. Que peut–on en déduire ?
- **S22** : Soit une suite (u_n) telle que pour tout entier n, on a $u_n \geqslant \frac{15}{4}\ 0{,}5^n$ et $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.
  Que peut–on en déduire ?

Prouver les variations d'une suite

- **S23** : Soit une suite (u_n) de premier terme $u_0 = 0$ et telle que pour tout entier n, $u_{n+1} = u_n + 2n + 2$.
  Prouver que la suite (u_n) est croissante.
- **S24** : Soit une suite (u_n) telle que pour tout entier n, on a $u_n = \frac{15}{4} \times 0{,}5^n$.
  En déduire que la suite (u_n) décroissante.
- **S25** : Soit une suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier n par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : x \mapsto 5 - \frac{4}{x+2}$.
  On sait que f a un unique point fixe noté $\alpha \approx 4{,}37$ à $0{,}1$ *près* et que f est croissante sur $[0; +\infty[$.
  En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$. Qu'en déduire ?
- **S26** : Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ pour tout entier n par $u_n = \frac{9}{6-u_n}$.
  Démontrer que la suite est bornée par 0 et 3 puisqu'elle est monotone. Que peut–on en déduire ?

Savoir construire un graphique en toile.

- **S27** : Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = 5 - \frac{4}{x+2}$ et la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = f(u_n)$.
  Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. Déterminer le point fixe de f c'est-à-dire la solution de l'équation $f(x) = x$.
  Compléter le graphique ci–dessous pour conjecturer variations et convergence de la suite (u_n).